Ασκήσεις

2/11/2016

~~Ασκήσεις~~

1 Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία $k\in\mathbb{N}$ και $x\in\mathbb{R}$.
Να δειχθεί ότι $a_n\to x \Leftrightarrow a_{n+k}\to x$

Απόδειξη

$\Rightarrow$ Ευθύ: Έστω $\varepsilon>0$

Εφόσον $a_n\to x$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $|a_n-x|<\varepsilon$

Τότε για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει $n+k > n\geq n_0$

άρα $|a_{n+k}-x|<\varepsilon$.

Επομένως $a_{n+k}\to x$

Αντίστροφα $\Leftarrow$: Έστω $\varepsilon>0$

Εφόσον $a_{n+k}\to x$ υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_1$ να ισχύει

$|a_{n+k}-x|<\varepsilon$

Θέτοντας $n_0=n_1+k$ έχουμε ότι για κάθε $n\geq n_0$ το n γράφεται $n=m+k$ με $m\geq n_1$

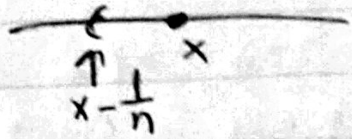
άρα $|a_{m+k}-x|<\varepsilon$

δηλαδή $|a_n-x|<\varepsilon$

2) Έστω $x \in \mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $q_n \to x$

β) Να δ. ότι υπάρχει ακολουθία αρρήτων $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $a_n \to x$



Λύση

α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x - \frac{1}{n} < x$
άρα, από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$ με
$x - \frac{1}{n} < q_n < x$.

$$\text{Εφόσον} \left.\begin{matrix} x - \frac{1}{n} \to x \\ \text{και } x \to x \end{matrix}\right\} \text{ από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει}$$

$$q_n \to x$$

β) Ομοίως, χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των αρρήτων στους πραγματικούς.

3) Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και θέτουμε $x = \sup A$.

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $a_n \to x$

β) Αν $x \notin A$ τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $a_n \to x$

Απόδειξη

α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $x - \frac{1}{n} < x = \sup A$
άρα υπάρχει $a_n \in A$ με $x - \frac{1}{n} < a_n$

Προφανώς $a_n \le x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εφόσον $x = \sup A$ και $a_n \in A$
Έτσι, $x - \frac{1}{n} < a_n < x$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{n} \to x \\ x \to x \end{array}\right\}$$ από θ. ισοσ. ακολ. προκύπτει ότι $a_n \to x$

β) Επιλέγουμε $a_1 \in A$ με $x - 1 < a_1$
Εφόσον $x \notin A$ θα έχουμε $a_1 \neq x$
και εφόσον $a_1 \le \sup A = x$
συμπεραίνουμε ότι $a_1 < x$.

Επιλέγουμε $a_2 \in A$ με $\max\{x - \frac{1}{2}, a_1\} < a_2$

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί οι όροι $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ στο A
με $x - \frac{1}{k} < a_k$ για $k = 1, \dots, n$

τότε $\max\{x - \frac{1}{n+1}, a_n\} < x$

και επιπλέον $a_{n+1} \in A$ με $\max\{x - \frac{1}{n+1}, a_n\} < a_{n+1}$

Για την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουμε
$a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ δηλ. είναι γνησίως αύξουσα

$x - \frac{1}{n} < a_n < x$ από θ. ισοσ. $a_n \to x$.
$x - \frac{1}{n} \to x$, $x \to x$

Άσκηση: Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το αντίστοιχο συμπέρασμα για το infimum (γν φθίνουσα)

Αποδεικνύεται επίσης το εξής

α) Αν $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
και $b_n \to +\infty$
τότε $a_n \to +\infty$

β) Αν $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
και $a_n \to -\infty$ τότε $b_n \to -\infty$

γ) Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to +\infty$
τότε $a_n + b_n \to +\infty \quad a_n b_n \to +\infty$

δ) Αν $a_n \to x,\ x \in \mathbb{R} \quad b_n \to +\infty$
τότε $a_n + b_n \to +\infty$.

ε) Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$
τότε $a_n b_n \to -\infty$

στ) Αν $a_n \to +\infty$ και $k \in \mathbb{N}$
τότε $a_n^k \to +\infty$

ζ) Αν $a_n \to -\infty$ και $k \in \mathbb{N}$
→ Αν k άρτιος τότε $a_n^k \to +\infty$
→ Αν k περιττός τότε $a_n^k \to -\infty$

<u>Θεώρημα</u>
Κάθε αύξουσα και φραγμένη άνω ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε (α_n) αύξουσα

δηλαδή $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

και φραγμένη άνω δηλαδή $\exists M \in \mathbb{R}$

ώστε $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

<u>άρα</u>:

Από το αξίωμα πληρότητας έχει supremum.

και θα δείξουμε ότι $a_n \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$

τότε υπάρχει στοιχείο του A μεγαλύτερο του $x - \varepsilon$

δηλαδή $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x - \varepsilon < a_{n_0}$

Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $a_n \geq a_{n_0}$ (εφόσον η (α_n) είναι αύξουσα)

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$

$$x - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq x < x + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - x| < \varepsilon$$

Επομένως, $a_n \to x$

Πρόταση

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα αλλά όχι φραγμένη άνω τότε $a_n \to +\infty$

Απόδειξη

Έστω $M \in \mathbb{R}$
Εφόσον η (a_n) δεν είναι φραγμένη άνω υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} > M$.

Εφόσον η (a_n) είναι αύξουσα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

$a_n \geq a_{n_0} > M$ επομένως $a_n \to +\infty$

Θεώρημα

Κάθε φθίνουσα και φραγμένη κάτω ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη → ομοίως με το προηγούμενο θεώρημα χρησιμοποιώντας infimum στη θέση του supremum.

Πρόταση

Αν η (a_n) είναι φθίνουσα αλλά όχι φραγμένη κάτω ακολουθία τότε $a_n \to -\infty$.

Απόδειξη → όμοια με την προηγούμενη πρόταση.

Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία ορίζεται με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$
Να εξεταστεί η ακολουθία (a_n) ως προς τη σύγκλιση. [Να βρείτε το όριό της, αν υπάρχει].

Λύση

Θα δείξουμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (δηλ. η ακολ. (a_n) είναι αύξουσα)

Απόδειξη: Με επαγωγή

$\boxed{1^o \text{ επαγωγικό βήμα}}$

Για $n = 1$: $a_2 = \sqrt{5 + a_1} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} > 1 = a_1$
άρα $a_1 \leq a_2$

$\boxed{\text{Γενικό επαγωγικό βήμα}}$

Υποθέτουμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ (και θα δείξουμε ότι $a_{n+1} \leq a_{n+2}$)

τότε $5 + a_n \leq 5 + a_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5 + a_n} \leq \sqrt{5 + a_{n+1}}$

$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$

Η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Δείχνουμε ότι $a_n \leq 10$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: Με επαγωγή

$\boxed{1^o \text{ επαγωγικό βήμα}}$ $a_1 = 1 \leq 10$

$\boxed{\text{Γενικό επαγωγικό βήμα}}$

Υποθέτουμε ότι $a_n \leq 10$ (και θα δ.ό. $a_{n+1} \leq 10$)

$\Rightarrow 5 + a_n \leq 15$

$\Rightarrow \sqrt{5 + a_n} \leq \sqrt{15}$

$\Rightarrow a_{n+1} \leq \sqrt{15} \leq \sqrt{16} = 4 \leq 10$

άρα $a_{n+1} \leq 10$, άρα άνω φραγμένη

Η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Επειδή η (α_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη είναι συγκλίνουσα.

Θέτουμε $x = \lim \alpha_n$

Έχουμε $\alpha_n \to x \Rightarrow 5+\alpha_n \to 5+x$

$\Rightarrow \sqrt{5+\alpha_n} \to \sqrt{5+x}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{n+1} \to \sqrt{5+x}}$

Επίσης, $\alpha_n \to x \Rightarrow \boxed{\alpha_{n+1} \to x}$

Από την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει ότι $x = \sqrt{5+x} \iff \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 = 5+x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 21$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\to \frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$ δεκτή

$\to \frac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$ απορρίπτεται γιατί $x \geq 0$

$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \text{ ή } x = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$ δηλαδή $\boxed{x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}}$

άρα $\boxed{\lim \alpha_n = \frac{1+\sqrt{21}}{2}}$

Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1=5$
και $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n}$
Να βρεθεί το όριό της.

Απόδειξη

Εύκολα βλέπουμε ότι όλοι οι όροι είναι θετικοί
δηλαδή $a_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Για κάθε $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n} \geq \sqrt{a_n^2}=|a_n|=a_n$
Συνεπώς $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
δηλαδή η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα.

(προς απαγωγή σε άτοπο)
Υποθέτουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη.
Εφόσον η (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη άνω
είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $x=\lim a_n$.

$a_n\to x \Rightarrow \begin{cases} a_n\to x \\ a_n^2\to x^2 \end{cases} \Rightarrow a_n^2+a_n\to x^2+x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a_n^2+a_n}\to\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow a_{n+1}\to\sqrt{x^2+x}$

$a_n\to x \Rightarrow a_{n+1}\to x$

άρα, από την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας
άρα $x=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow x^2=x^2+x \Rightarrow \underline{x=0}$.
άτοπο γιατί

Επειδή (a_n) αύξουσα και $a_1=5$ προκύπτει ότι
$a_n\geq 5$ $\forall n\in\mathbb{N}$ άρα $\boxed{x\geq 5}$

Επομένως, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη
Επειδή (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη
τότε $a_n\to+\infty$.

SOS

Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 17$ και $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n - 1}$.
Να βρεθεί το όριό της αν υπάρχει

Απόδειξη

Δείχνουμε με επαγωγή ότι $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1ο επαγ. βήμα $a_1 = 17 \geq 1$

Γενικό επαγ. βήμα $a_n \geq 1 \Rightarrow a_n - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a_n - 1} \geq 0$
$\Rightarrow 1 + \sqrt{a_n - 1} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq 1$

Δείχνουμε με επαγωγή $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1ο επαγ. βήμα
$a_2 = 1 + \sqrt{a_1 - 1} = 1 + \sqrt{17 - 1} = 5 \leq a_1$

Γενικό επαγ. βήμα
$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow a_{n+1} - 1 \leq a_n - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1} - 1} \leq \sqrt{a_n - 1}$
$\Rightarrow 1 + \sqrt{a_{n+1} - 1} \leq 1 + \sqrt{a_n - 1}$
$\Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω άρα συγκλίνουσα.
Θέτουμε $x = \lim a_n$
$a_n \to x \Rightarrow a_n - 1 \to x - 1 \Rightarrow \sqrt{a_n - 1} \to \sqrt{x - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + \sqrt{a_n - 1} \to 1 + \sqrt{x - 1}$
$\Rightarrow a_{n+1} \to 1 + \sqrt{x - 1}$

$a_n \to x \Rightarrow \boxed{a_{n+1} \to x}$

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας $x = 1 + \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

5ος Δείχνουμε (χρησιμοποιώντας επαγωγή) ότι $a_n \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Αυτή η απόδειξη μας απεικονίζει ότι δεν είναι το 1.

<u>1ο επαγωγικό βήμα</u> $a_1 = 17 \geq 2$

<u>Γενικό Επαγωγ. Βήμα</u>

$$\begin{aligned} & a_n \geq 2 \\ \Rightarrow\ & a_n - 1 \geq 1 \\ \Rightarrow\ & \sqrt{a_n - 1} \geq 1 \\ \Rightarrow\ & 1 + \sqrt{a_n - 1} \geq 2 \\ \Rightarrow\ & a_{n+1} \geq 2 \end{aligned}$$

Η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Επειδή $a_n \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

και $a_n \to x$ προκύπτει ότι $x \geq 2$.

Επειδή (όπως δείξαμε) $x = 1, x = 2$ προκύπτει $x = 2$

άρα $\lim a_n = 2$

$x = -2\sqrt{-3x} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4(-3x) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \wedge x = -12 \\ x \leq 0 \end{cases}$

__Άσκηση:__ Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = -1$

$a_{n+1} = -2\sqrt{-3a_n}$

__Λύση__

Δείχνουμε ότι $-12 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

__1° επαγωγικό βήμα:__ $a_1 = -1 \geq -12$

__Γενικό επαγωγικό βήμα:__ $a_n \geq -12 \Rightarrow -3a_n \leq 36$

$\Rightarrow \sqrt{-3a_n} \leq 6 \Rightarrow -2\sqrt{-3a_n} \geq -12$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq -12$

Δείχνουμε με επαγωγή ότι $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

__1° επαγωγικό βήμα__

για $n=1$: $a_2 = -2\sqrt{-3a_1} = -2\sqrt{-3\cdot(-1)} = -2\sqrt{3} < -1 = a_1$

__Γενικό επαγωγικό βήμα__

$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow -3a_{n+1} \geq -3a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3a_{n+1}} \geq \sqrt{-3a_n}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{-3a_{n+1}} \leq -2\sqrt{-3a_n}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_{n+2} \leq a_{n+1}}$

άρα, η a_n είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω (από τον αριθμό -12)

Συνεπώς είναι συγκλίνουσα

Θέτουμε $x = \lim a_n$

$a_n \to x \Rightarrow -3a_n \to -3x \Rightarrow \sqrt{-3a_n} \to \sqrt{-3x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\sqrt{-3a_n} \to -2\sqrt{-3x}$

$\Rightarrow a_{n+1} \to -2\sqrt{-3x} \quad (1)$

$a_n \to x \Rightarrow a_{n+1} \to x \quad (2)$

Επομένως, από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας

Από (1),(2) $\Rightarrow$ $x=0$ ή $x=-12$.

Επειδή (α_n) φθίνουσα με $\alpha_1=-1$ έχουμε $\alpha_n \leq -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ άρα $x \leq -12$

$\lim \alpha_n = -12$

Δίνεται:

$$\boxed{\begin{aligned} &\beta_1 = 1 \\ &\beta_{n+1} = -3 + \sqrt{23+\beta_n} \end{aligned}}$$